「和と差の積」の拡張

$x^n - y^n$ は、n が偶数であっても奇数であっても、必ず因数分解できる。

$x^n + y^n$ は、n が奇数の時は必ず因数分解できる。

偶数でも、因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。

上記の法則が成り立ちます。

マイナス の場合、

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$ です。

$n=2$ の時は、和と差の積です。 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$n=3$ の時は、有名な高校生泣かせの公式ですね。

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

マイナスの場合は、n がどのような自然数であっても必ず成り立ちます。

プラス の場合、n が奇数なら、下記の公式が成り立ちます。

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

後のカッコの中では、プラスマイナスが、かわりばんこに出てきます。

n が偶数でも因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。

n が 2 の累乗の場合は、因数分解できません。

$n=3$ の時は、例の高校生泣かせの公式です。（3 は奇数ですから）

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$n=5$ の時は、

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$

展開して頂ければ、途中の項がうまく消えて元の式になる事がお判りと思います。

「偶数でも、因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。」というのは、

たとえば $n=10$ だと、$10=2\times 5$ なので

$$\begin{aligned}
&x^{10}+y^{10}=(x^2)^5+(y^2)^5\\
&=(x^2+y^2)\left((x^2)^4-(x^2)^3y^2+(x^2)^2(y^2)^2-x^2(y^2)^3+(y^2)^4\right)\\
&=(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)
\end{aligned}$$

となります。

この法則に関して、下記のように面白い応用例があります。

マイナスの場合で、$x=1$、$y=r$ とした時、(当然 $r\neq 1$)

$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1})$ となりますが、これって

$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$ じゃあないですか。

等比数列の和の公式が、因数分解の一般的公式から定義出来るわけです。

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}a$ ですよね。

なお、マイナスの場合で、かつ n が偶数の場合、

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$ でも、

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$ でも

どちらの公式でも因数分解できます。$(x-y)$ と $(x+y)$ 両方の因数を持つわけです。あるいは、$(x^2 - y^2)$ の因数を持つとも言う事もできる。

いきなりこの公式で因数分解するよりは、和と差の積を用いて n を半分にしてからの方が簡単にきれいに因数分解できます。たとえば、$n=10$ の場合

$$
\begin{aligned}
& x^{10} - y^{10} \\
&= (x^5 - y^5)(x^5 + y^5) \\
&= (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)
\end{aligned}
$$

マイナスの場合で、n が 2 の累乗の場合にはとってもきれいに因数分解できます。

たとえば、$n=16$ の場合、n を次々と半分にしていくと下記のようになります。

$$
\begin{aligned}
& x^{16} - y^{16} \\
&= (x^8 - y^8)(x^8 + y^8) \\
&= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \\
&= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \\
&= (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)
\end{aligned}
$$

これを見れば $x^n + y^n$ で n が 2 の累乗の場合は、どうしようもないんだな〜って事が、よ〜くわかると思います。

分田　真