

## 「和と差の積」の拡張

$x^n - y^n$  は、 $n$  が偶数であっても奇数であっても、必ず因数分解できる。

$x^n + y^n$  は、 $n$  が奇数の時は必ず因数分解できる。

偶数でも、因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。

上記の法則が成り立ちます。

マイナスの場合、

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad \text{です。}$$

$$n=2 \text{ の時は、和と差の積です。} \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$n=3$  の時は、有名な高校生泣かせの公式ですね。

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

マイナスの場合は、 $n$  がどのような自然数であっても必ず成り立ちます。

プラスの場合、 $n$  が奇数なら、下記の公式が成り立ちます。

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

後のカッコの中では、プラスマイナスが、かわりばんこに出てきます。

$n$  が偶数でも因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。

$n$  が2の累乗の場合は、因数分解できません。

$n=3$  の時は、例の高校生泣かせの公式です。(3は奇数ですから)

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$n=5$  の時は、

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

展開して頂ければ、途中の項がうまく消えて元の式になる事がお判りと思います。

「偶数でも、因数に奇数を持つ偶数なら因数分解できる。」というのは、

たとえば  $n=10$  だと、 $10=2 \times 5$  なので

$$\begin{aligned} x^{10} + y^{10} &= (x^2)^5 + (y^2)^5 \\ &= (x^2 + y^2) \left( (x^2)^4 - (x^2)^3 y^2 + (x^2)^2 (y^2)^2 - x^2 (y^2)^3 + (y^2)^4 \right) \\ &= (x^2 + y^2) (x^8 - x^6 y^2 + x^4 y^4 - x^2 y^6 + y^8) \end{aligned}$$

となります。

この法則に関して、下記のように面白い応用例があります。

マイナスの場合で、 $x=1$ 、 $y=r$ とした時、(当然  $r \neq 1$ )

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1})$$
 となりますが、これって

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$
 じゃあないですか。

等比数列の和の公式が、因数分解の一般的公式から定義出来るわけです。

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} a$$
 ですよ。

なお、マイナスの場合で、かつ  $n$  が偶数の場合、

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad \text{でも、}$$

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1}) \quad \text{でも}$$

どちらの公式でも因数分解できます。 $(x - y)$ と $(x + y)$  両方の因数を持つわけです。あるいは、 $(x^2 - y^2)$  の因数を持つとも言う事もできる。

いきなりこの公式で因数分解するよりは、和と差の積を用いて  $n$  を半分にしてからの方が簡単にきれいに因数分解できます。たとえば、 $n = 10$  の場合

$$\begin{aligned} x^{10} - y^{10} &= (x^5 - y^5)(x^5 + y^5) \\ &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \end{aligned}$$

マイナスの場合で、 $n$  が2の累乗の場合にはとってもきれいに因数分解できます。

たとえば、 $n = 16$  の場合、 $n$  を次々と半分にしていくと下記のようになります。

$$\begin{aligned} x^{16} - y^{16} &= (x^8 - y^8)(x^8 + y^8) \\ &= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \end{aligned}$$

これを見れば  $x^n + y^n$  で  $n$  が2の累乗の場合は、どうしようもないんだな～って事が、よ～くわかると思います。

分田 真