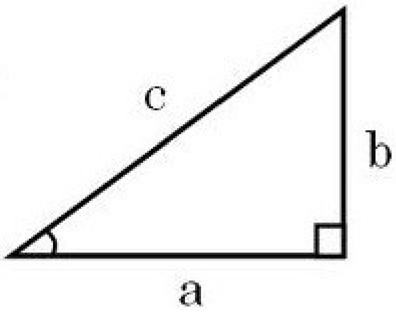
ピタゴラスの定理ってあるよね。三平方の定理とも言いますね。



$c^2 = a^2 + b^2$

その中でも、a, b, c が全部自然数なのを「ピタゴラス数」なんて呼びます。
一番有名なのが「3, 4, 5」。

で、ピタゴラス数を作る方法は色々あるようですが
ちょっと面白い簡単な方法を思いついたので
ここで発表します。覚えておくと便利です。

それは
$\mathrm{c} = x + y + z$　　(x, y, z は、もちろん 自然数)
と置くのです
$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx$
$= (x + y)^2 + z^2 + 2yz + 2zx$
さて、ここで、最終項の 2zx が、$2zx = y^2$ なら
$c^2 = (x + y)^2 + z^2 + 2yz + y^2$
$= (x + y)^2 + (y + z)^2$ となって
$a = x + y$,　$b = y + z$ とすれば
$c^2 = a^2 + b^2$　となって三平方の定理になりますね。

そこで　$2zx = y^2$ となる自然数の組
(x, y, z) を作れば良いことになります。
$y = \sqrt{2xz}$ ですから
$x = m^2,$　$z = 2n^2$　(m, n は自然数)　とすれば
$\mathrm{y} = \sqrt{2xz} = \sqrt{2 \times m^2 \times 2n^2} = 2mn$　となり
バッチリうまくいくのだ！！

それではさっそく作ってみましょう。

$m = n = 1$　の場合
$x = m^2 = 1^2 = 1$ ，　$y = 2mn = 2 \times 1 \times 1 = 2$ ，　$z = 2n^2 = 2 \times 1^2 = 2$
なので
$a = x + y = 1 + 2 = 3$ ，　$b = y + z = 2 + 2 = 4$
$c = x + y + z = 1 + 2 + 2 = 5$　で
有名な　(3, 4, 5)　が出来ました。

$m = 1,\ n = 2$　の場合
$x = m^2 = 1^2 = 1$ ，　$y = 2mn = 2 \times 1 \times 2 = 4$ ，　$z = 2n^2 = 2 \times 2^2 = 8$
で
$a = x + y = 1 + 4 = 5$ ，　$b = y + z = 4 + 8 = 12$
$c = x + y + z = 1 + 4 + 8 = 13$
(3, 4, 5) の次に有名な　(5, 12, 13)　が出来ました。

$m = 3,\ n = 1$　の場合
$x = m^2 = 3^2 = 9$ ，　$y = 2mn = 2 \times 3 \times 1 = 6$ ，　$z = 2n^2 = 2 \times 1^2 = 2$
で
$a = x + y = 9 + 6 = 15$ ，　$b = y + z = 6 + 2 = 8$
$c = x + y + z = 9 + 6 + 2 = 17$
(15, 8, 17)　が出来ました。

$m = 1,\ n = 3$　の場合
$x = m^2 = 1^2 = 1$ ，　$y = 2mn = 2 \times 1 \times 3 = 6$ ，　$z = 2n^2 = 2 \times 3^2 = 18$
で
$a = x + y = 1 + 6 = 7$ ，　$b = y + z = 6 + 18 = 24$
$c = x + y + z = 1 + 6 + 18 = 25$
(7, 24, 25)　が出来ました。

こんなふうに、どんどん出来ます。

ただ、困った事に
$m = 2,\ n = 1$　の場合
$x = m^2 = 2^2 = 4$ ，　$y = 2mn = 2 \times 2 \times 1 = 4$ ，　$z = 2n^2 = 2 \times 1^2 = 2$
で
$a = x + y = 4 + 4 = 8$ ，　$b = y + z = 4 + 2 = 6$
$c = x + y + z = 4 + 4 + 2 = 10$

(8, 6, 10)　で、これでは (3, 4, 5) の 2 倍になってしまいます
こんなふうにカブッてしまわないようにするには
どうやら、m が奇数である必要があるようです。

又、$m=3,\ n=3$　の場合
$x=m^2=3=9$ ，　$y=2mn=2\times3\times3=18$ ，　$z=2n^2=2\times3^2=18$
$a=x+y=9+18=27$ ，　$b=y+z=18+18=36$
$c=x+y+z=9+18+18=45$
(27, 36, 45)　で、これでは (3, 4, 5) の 9 倍になってしまいます
なので、$(m,\ n)$ の整数倍は使えませんね。

、、、

他に、何か条件はあるでしょうか？

整数論に詳しい方、または、とってもお暇な方、ぜひ御教示を、、、。

分田　真